



Examen de Grado
Econometría y Métodos Cuantitativos
Enero, 2019

Duración : 150 minutos
Fecha : 23 de enero de 2019
Hora de comienzo : 14:00 horas
Hora de fin : 16:30 horas.

INSTRUCCIONES

Una vez leído en voz alta por el profesor en la sala, usted dispone de dos horas y media para responder este examen. No empiece a responder hasta que se le indique hacerlo.

Responda solamente 2 preguntas de las 3 preguntas propuestas. Si responde más de 2 preguntas solamente se considerarán las 2 peores respuestas.

Pregunta 1 (40 puntos)

La temperatura en el mundo ha cambiado afectando potencialmente el lugar donde las personas eligen vivir. Conocer la distribución espacial de la población es importante para el correcto diseño e implementación de diversas políticas públicas. Por esto, el Ministerio le encarga estimar cómo cambios en la temperatura en Chile pueden afectar la distribución geográfica de la población.

Usted comienza estudiando los efectos que han tenido las variaciones en la temperatura a nivel local. Para ello obtiene datos de 345 municipalidades en Chile y decide estimar la siguiente regresión usando el método de mínimos cuadrados ordinarios:

$$\Delta N_m = \alpha + \beta \Delta T_m + \varepsilon_m \quad (1)$$

donde $\Delta N_m = \frac{P_{m,2007} - P_{m,1992}}{P_{m,1992}}$ es el cambio porcentual en el número de habitantes en el municipio m entre los censos de 1992 y 2017 ($P_{m,t}$ es la población en el municipio m en el año t). Además, $\Delta T_m = T_{2007} - T_{1992}$ es el cambio en la temperatura en grados Celsius; por ejemplo, $\Delta T_m = 1$ significa que la temperatura aumentó en 1 grado Celsius en la municipalidad m . T_t corresponde al promedio anual de temperaturas diarias reportados por sofisticados medidores.

- a) **(6 puntos)** Interprete el significado de los coeficientes de la regresión lineal. Sobre la base de los siguientes coeficientes, explique cómo afectará un aumento de 2 grados Celsius en los próximos 25 años a la distribución geográfica de la población: $\hat{\alpha} = 0.10$, $\hat{\beta} = -0.07$.
- b) **(9 puntos)** Identifique 3 condiciones que hagan posible la interpretación causal que pretende el Ministerio.

En el Ministerio le piden también que estime cómo cambiará el ingreso promedio de las personas que se quedan en lugares donde habrá migración debido a cambios en la temperatura. Para ello, le sugieren que estime el efecto causal de la migración usando variaciones en la temperatura como instrumento. Es decir, le piden que estime la siguiente regresión usando el método de mínimos cuadrados en dos etapas (o variables instrumentales):

$$\log(Y_m) = \phi + \gamma \Delta N_m + \mu_m \quad (2)$$

donde la primera etapa está representada por la ecuación (1). En la ecuación (2), Y_m corresponde al ingreso promedio de las personas que viven en el municipio m en el año 2017, y todas las otras variables están definidas como en la ecuación (1).

- c) **(5 puntos)** Antes de hacerlo, usted decide estimar la siguiente regresión por mínimos cuadrados ordinarios:

$$\log(Y_m) = \xi + \delta \Delta T_m + \eta_m \quad (3)$$

obteniendo $\hat{\xi} = 0.01$ y $\hat{\delta} = 0.04$. Interprete el coeficiente $\hat{\delta}$ y discuta su relación con $\hat{\beta}$.

- d) **(5 puntos)** A partir de los resultados anteriores, calcule e interprete $\hat{\gamma}$.
- e) **(5 puntos)** ¿Bajo cuáles supuestos es válido considerar que $\hat{\gamma}$ representa el efecto causal de la migración en el ingreso promedio de los habitantes de un municipio? Explique.
- f) **(5 puntos)** ¿Bajo cuáles supuestos es válido considerar que $\hat{\gamma}$ representa el efecto causal de la migración en el ingreso promedio de las personas que se quedan en el municipio (es decir, aquellas que no migran)? Discuta.
- g) **(5 puntos)** Un colega plantea que es equivocado utilizar los cambios en la temperatura promedio y sugiere que la variable explicativa relevante debiera ser los cambios en las temperaturas máximas. Es por ello que sostiene que esto implica sesgos importantes. ¿Tiene razón el colega? Si el colega tuviera razón, ¿cuáles serían las consecuencias para la estrategia de estimación? Discuta.

Pregunta 2 (40 puntos)

Unos prestigiosos investigadores quieren estudiar empíricamente el rol de la protección de los derechos de propiedad como determinante del desarrollo económico. Para ello cuentan con una base de datos de 70 países con las siguientes variables:

- PIB_pc: producto per cápita en dólares constantes.
- ln_PIB_pc: logaritmo natural del producto per cápita en dólares constantes.
- Der_Prop: índice de eficacia en la protección de los derechos de propiedad, siendo 10 el máximo valor posible.

La tabla 1 presenta los estadísticos descriptivos básicos para estas variables:

Tabla 1

| Variable | Obs | Mean | Std. Dev. | Min | Max |
|-----------|-----|----------|-----------|----------|----------|
| PIB_pc | 70 | 5989.575 | 6610.915 | 450 | 27330 |
| ln_PIB_pc | 70 | 8.141596 | 1.05931 | 6.189248 | 10.21574 |
| Der_Prop | 70 | 6.646104 | 1.552533 | 3.5 | 10 |

Los investigadores estiman la correlación incondicional entre el desarrollo económico y los derechos de propiedad, obteniendo los siguientes resultados:

Tabla 2

```
. reg PIB_pc Der_Prop
```

| Source | SS | df | MS | Number of obs = | 70 |
|----------|------------|----|------------|-----------------|----------|
| Model | 1.7962e+09 | 1 | 1.7962e+09 | F(1, 68) | = 100.16 |
| Residual | 1.2194e+09 | 68 | 17932786.9 | Prob > F | = 0.0000 |
| Total | 3.0156e+09 | 69 | 43704196.4 | R-squared | = 0.5956 |
| | | | | Adj R-squared | = 0.5897 |
| | | | | Root MSE | = 4234.7 |

| PIB_pc | Coef. | Std. Err. | t | P> t | [95% Conf. Interval] |
|----------|-----------|-----------|-------|-------|----------------------|
| Der_Prop | 3286.3 | | 10.01 | 0.000 | |
| _cons | -15931.52 | 2240.282 | -7.11 | 0.000 | -20401.93 -11461.11 |

```
. estat hettest
```

Breusch-Pagan / Cook-Weisberg test for heteroskedasticity

H0: Constant variance

Variables: fitted values of PIB_pc

chi2(1) = 17.05

Prob > chi2 = 0.0000

- a) **(10 puntos)** A partir de los resultados de la Tabla 2, se pide que:
- i. (2 puntos) Interprete el coeficiente estimado, y refiérase a su significancia económica.
 - ii. (6 puntos) Calcule el error estándar de la estimación del efecto parcial de los derechos de propiedad y explique (teóricamente) cómo este valor podría verse afectado por:
 - i. El tamaño de la muestra.
 - ii. La varianza del término de error.
 - iii. La variabilidad de la variable independiente.
 - iii. (2 puntos) Construya un intervalo de confianza bilateral al 95% para el coeficiente estimado.
- b) **(6 puntos)** Para facilitar la comparación de sus resultados con trabajos previos, los investigadores deciden transformar la variable PIB_pc ("PIB per cápita") a PIB_pc_1000 ("PIB per cápita en miles de dólares").
- i. (3 puntos) Calcule el valor del coeficiente estimado para la variable "Der_Prop" y explique cómo cambia su significancia estadística.
 - ii. (3 puntos) Los investigadores notan que el valor del error cuadrático medio de la regresión con la variable dependiente transformada ha disminuido sustancialmente y concluyen que este modelo econométrico tiene una mejor bondad de ajuste respecto al modelo sin la transformación. Discuta.
- c) **(9 puntos)** Los investigadores deciden ahora estimar un modelo usando el logaritmo natural del PIB per cápita (ln_PIB_pc), obteniendo lo siguiente:

Tabla 3

```
. reg ln_PIB_pc Der_Prop
```

| Source | SS | df | MS | Number of obs | = | 70 |
|----------|------------|----|------------|---------------|---|--------|
| Model | 44.2500667 | 1 | 44.2500667 | F(1, 68) | = | 90.69 |
| Residual | 33.1773828 | 68 | .487902608 | Prob > F | = | 0.0000 |
| Total | 77.4274494 | 69 | 1.12213695 | R-squared | = | 0.5715 |
| | | | | Adj R-squared | = | 0.5652 |
| | | | | Root MSE | = | .6985 |

| ln_PIB_pc | Coef. | Std. Err. | t | P> t | [95% Conf. Interval] |
|-----------|----------|-----------|-------|-------|----------------------|
| Der_Prop | .5150123 | .0541628 | 9.52 | 0.000 | .4077321 .6238926 |
| _cons | 4.713454 | .3695264 | 12.76 | 0.000 | 3.976075 5.450832 |

```
. estat hettest
```

```
Breusch-Pagan / Cook-Weisberg test for heteroskedasticity
```

```
H0: Constant variance
```

```
Variables: fitted values of ln_PIB_pc
```

```
chi2(1) = 0.12
```

```
Prob > chi2 = 0.7269
```

- i. (5 puntos) Explique cuidadosamente las razones por las cuales los investigadores preferirían trabajar con la variable dependiente en logaritmos, e identifique formalmente el problema econométrico de la estimación de la Tabla 1 que se resuelve al utilizarlos.
 - ii. (2 puntos) Interprete económicamente el significado del coeficiente estimado.
 - iii. (2 puntos) El R-cuadrado cae de 0.59 a 0.57, y por lo tanto los investigadores preferirían siempre el modelo sin transformar. Discuta.
- d) (5 puntos) En su afán por encontrar el “mejor” modelo econométrico los investigadores estiman el modelo usando el logaritmo natural de la variable con la escala transformada (es decir, $\ln_PIB_pc_1000$). Encuentre el valor de la constante, y luego explique por qué no cambia el coeficiente estimado para “Der_Prop”.

Tabla 4

. reg ln_PIB_pc_1000 Der_Prop

| Source | SS | df | MS | Number of obs | = | 70 |
|----------|------------|----|------------|---------------|---|--------|
| Model | 44.2500665 | 1 | 44.2500665 | F(1, 68) | = | 90.69 |
| Residual | 33.1773815 | 68 | .487902669 | Prob > F | = | 0.0000 |
| Total | 77.427448 | 69 | 1.12213693 | R-squared | = | 0.5715 |
| | | | | Adj R-squared | = | 0.5652 |
| | | | | Root MSE | = | .6985 |

| ln_PIB_~1000 | Coef. | Std. Err. | t | P> t | [95% Conf. Interval] |
|--------------|----------|-----------|------|-------|----------------------|
| Der_Prop | .5156123 | .0541628 | 9.52 | 0.000 | .4077321 .6238926 |
| _cons | | | | | |

- e) (10 puntos) Al presentar estos resultados en un seminario académico, un colega señala que el modelo lineal está incompleto por cuanto omite una medida de eficiencia del sistema judicial.
- i. Discuta si esta omisión podría sesgar los resultados de las estimaciones anteriores.
 - ii. Refiérase al rol que juega la correlación entre la “eficiencia del sistema judicial” y los “derechos de propiedad” en un eventual sesgo.
 - iii. Explique qué pasaría con dicho sesgo en el caso que la variable “Der_Prop” tuviera poca variación.

Pregunta 3 (40 puntos)

Suponga que Ud. está interesado en medir el efecto del ingreso sobre la mortalidad. Presumiblemente los individuos más pobres están más expuestos a shocks de salud negativos y es más probable que fallezcan. Para este objetivo, se compilan datos de ingreso y mortalidad de 5702 individuos. Mortalidad es una variable dicotómica que es igual a 1 si el individuo fallece dentro de los 5 años siguientes a la realización de la entrevista.

La siguiente tabla presenta los resultados de una regresión de mortalidad sobre la edad, el género y el logaritmo del ingreso del individuo, usando mínimos cuadrados ordinarios (MCO) y Variables Instrumentales (VI).

| Variable | Especificación | | | |
|---------------------|----------------|--------|--------|--------|
| | (1) MCO | | (2) VI | |
| | Coef. | t-stat | Coef. | t-stat |
| Edad | 0.002 | 31.6 | 0.002 | 13.4 |
| Género (Hombre = 1) | 0.015 | 6.4 | 0.037 | 8.2 |
| log(Ingreso) | -0.080 | -10.1 | -0.040 | -12.0 |
| Constante | 0.020 | 1.9 | 0.450 | 8.6 |

- (2 puntos)** Sobre la base de la especificación (1), explique cuál es el efecto del ingreso en la mortalidad. ¿Es este efecto estadísticamente significativo? Justifique.
- (5 puntos)** Usted sospecha que el ingreso y la mortalidad fueron medidas con error. ¿Cuáles son los efectos sobre el estimador de la especificación (1)? Explique en detalle.
- (10 puntos)** Un analista le comenta que la mortalidad es muy variable en los individuos mayores de 50 años y muy poco variable en los individuos menores de 50 años. Discuta la racionalidad económica de este argumento. Si esta hipótesis fuese cierta, ¿cómo afectaría a las estimaciones de la especificación (1)? Refiérase a cómo se podría evaluar formalmente esta hipótesis y luego explique con precisión de qué manera se podría corregir el eventual problema.
- (7 puntos)** Otro analista le dice que es posible que la mortalidad de un individuo dependa de la salud del resto de los miembros del hogar, lo que podría afectar el nivel de ingreso del individuo (por ejemplo, porque trabaja menos horas). ¿Cómo se podría evaluar formalmente esta hipótesis? Si ésta fuese cierta, ¿cómo afectaría a la estimación por MCO? Explique detalladamente.
- (16 puntos)** La especificación (2) corresponde a una estimación utilizando el método de variables instrumentales, donde el logaritmo del ingreso es instrumentado usando el logaritmo del ingreso en el período anterior.
 - (6 puntos)** Explique en qué consiste este procedimiento (incluyendo la fórmula del estimador) y bajo cuáles supuestos éste es válido.

- ii. (4 puntos) Discuta si es válido o no utilizar el logaritmo del ingreso en el período anterior como instrumento. Sea preciso.
- iii. (6 puntos) Comente la nueva estimación del efecto del ingreso en la mortalidad, y luego explique cómo se podría comparar formalmente ambos efectos.

t Table

| cum. prob | $t_{.50}$ | $t_{.75}$ | $t_{.90}$ | $t_{.85}$ | $t_{.90}$ | $t_{.95}$ | $t_{.975}$ | $t_{.99}$ | $t_{.995}$ | $t_{.999}$ | $t_{.9995}$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|-----------|------------|------------|-------------|
| one-tail | 0.50 | 0.25 | 0.20 | 0.15 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 | 0.001 | 0.0005 |
| two-tails | 1.00 | 0.50 | 0.40 | 0.30 | 0.20 | 0.10 | 0.05 | 0.02 | 0.01 | 0.002 | 0.001 |
| df | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0.000 | 1.000 | 1.376 | 1.963 | 3.078 | 6.314 | 12.71 | 31.82 | 63.66 | 318.31 | 636.62 |
| 2 | 0.000 | 0.816 | 1.061 | 1.386 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 22.327 | 31.599 |
| 3 | 0.000 | 0.765 | 0.978 | 1.250 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 10.215 | 12.924 |
| 4 | 0.000 | 0.741 | 0.941 | 1.190 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 7.173 | 8.610 |
| 5 | 0.000 | 0.727 | 0.920 | 1.156 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 5.893 | 6.869 |
| 6 | 0.000 | 0.718 | 0.906 | 1.134 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 5.208 | 5.959 |
| 7 | 0.000 | 0.711 | 0.896 | 1.119 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 4.785 | 5.408 |
| 8 | 0.000 | 0.706 | 0.889 | 1.108 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 4.501 | 5.041 |
| 9 | 0.000 | 0.703 | 0.883 | 1.100 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 4.297 | 4.781 |
| 10 | 0.000 | 0.700 | 0.879 | 1.093 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 4.144 | 4.587 |
| 11 | 0.000 | 0.697 | 0.876 | 1.088 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 4.025 | 4.437 |
| 12 | 0.000 | 0.695 | 0.873 | 1.083 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 3.930 | 4.318 |
| 13 | 0.000 | 0.694 | 0.870 | 1.079 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 3.852 | 4.221 |
| 14 | 0.000 | 0.692 | 0.868 | 1.076 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 3.787 | 4.140 |
| 15 | 0.000 | 0.691 | 0.866 | 1.074 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 3.733 | 4.073 |
| 16 | 0.000 | 0.690 | 0.865 | 1.071 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 3.686 | 4.015 |
| 17 | 0.000 | 0.689 | 0.863 | 1.069 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.646 | 3.965 |
| 18 | 0.000 | 0.688 | 0.862 | 1.067 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.610 | 3.922 |
| 19 | 0.000 | 0.688 | 0.861 | 1.066 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.579 | 3.883 |
| 20 | 0.000 | 0.687 | 0.860 | 1.064 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.552 | 3.850 |
| 21 | 0.000 | 0.686 | 0.859 | 1.063 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.527 | 3.819 |
| 22 | 0.000 | 0.686 | 0.858 | 1.061 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.505 | 3.792 |
| 23 | 0.000 | 0.685 | 0.858 | 1.060 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.485 | 3.768 |
| 24 | 0.000 | 0.685 | 0.857 | 1.059 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.467 | 3.745 |
| 25 | 0.000 | 0.684 | 0.856 | 1.058 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.450 | 3.725 |
| 26 | 0.000 | 0.684 | 0.856 | 1.058 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.435 | 3.707 |
| 27 | 0.000 | 0.684 | 0.855 | 1.057 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.421 | 3.690 |
| 28 | 0.000 | 0.683 | 0.855 | 1.056 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.408 | 3.674 |
| 29 | 0.000 | 0.683 | 0.854 | 1.055 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.396 | 3.659 |
| 30 | 0.000 | 0.683 | 0.854 | 1.055 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.385 | 3.646 |
| 40 | 0.000 | 0.681 | 0.851 | 1.050 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 3.307 | 3.551 |
| 60 | 0.000 | 0.679 | 0.848 | 1.045 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 | 3.232 | 3.460 |
| 80 | 0.000 | 0.678 | 0.846 | 1.043 | 1.292 | 1.664 | 1.990 | 2.374 | 2.639 | 3.195 | 3.416 |
| 100 | 0.000 | 0.677 | 0.845 | 1.042 | 1.290 | 1.660 | 1.984 | 2.364 | 2.626 | 3.174 | 3.390 |
| 1000 | 0.000 | 0.675 | 0.842 | 1.037 | 1.282 | 1.646 | 1.962 | 2.330 | 2.581 | 3.098 | 3.300 |

Función de Distribución de la variable F, percentiles 95

| | | Grados de libertad del numerador | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------|-------|----------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|-------|--------|-------|--------|--------|---------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | 1000000 |
| 1 | 16145 | 199.5 | 215.71 | 224.56 | 230.16 | 233.99 | 236.77 | 238.88 | 240.54 | 241.88 | 243.9 | 245.35 | 248.02 | 249.05 | 250.1 | 251.14 | 252.2 | 253.25 | 254.32 | |
| 2 | 18.51 | 19 | 19.16 | 19.25 | 19.3 | 19.33 | 19.35 | 19.37 | 19.38 | 19.4 | 19.41 | 19.43 | 19.45 | 19.45 | 19.46 | 19.47 | 19.48 | 19.49 | 19.5 | |
| 3 | 10.13 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.81 | 8.79 | 8.74 | 8.7 | 8.66 | 8.64 | 8.62 | 8.59 | 8.57 | 8.55 | 8.53 | |
| 4 | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6 | 5.96 | 5.91 | 5.86 | 5.8 | 5.77 | 5.75 | 5.72 | 5.69 | 5.66 | 5.63 | |
| 5 | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 | 4.74 | 4.68 | 4.62 | 4.56 | 4.53 | 4.5 | 4.46 | 4.43 | 4.4 | 4.37 | |
| 6 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.1 | 4.06 | 4 | 3.94 | 3.87 | 3.84 | 3.81 | 3.77 | 3.74 | 3.7 | 3.67 | |
| 7 | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 | 3.64 | 3.57 | 3.51 | 3.44 | 3.41 | 3.38 | 3.34 | 3.3 | 3.27 | 3.23 | |
| 8 | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.5 | 3.44 | 3.39 | 3.35 | 3.28 | 3.22 | 3.15 | 3.12 | 3.08 | 3.04 | 3.01 | 2.97 | 2.93 | |
| 9 | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 | 3.14 | 3.07 | 3.01 | 2.94 | 2.9 | 2.86 | 2.83 | 2.79 | 2.75 | 2.71 | |
| 10 | 4.96 | 4.1 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 | 2.98 | 2.91 | 2.85 | 2.77 | 2.74 | 2.7 | 2.66 | 2.62 | 2.58 | 2.54 | |
| 11 | 4.84 | 3.98 | 3.59 | 3.36 | 3.2 | 3.09 | 3.01 | 2.95 | 2.9 | 2.85 | 2.79 | 2.72 | 2.65 | 2.61 | 2.57 | 2.53 | 2.49 | 2.45 | 2.4 | |
| 12 | 4.75 | 3.89 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3 | 2.91 | 2.85 | 2.8 | 2.75 | 2.69 | 2.62 | 2.54 | 2.51 | 2.47 | 2.43 | 2.38 | 2.34 | 2.3 | |
| 13 | 4.67 | 3.81 | 3.41 | 3.18 | 3.03 | 2.92 | 2.83 | 2.77 | 2.71 | 2.67 | 2.6 | 2.53 | 2.46 | 2.42 | 2.38 | 2.34 | 2.27 | 2.22 | 2.18 | |
| 14 | 4.6 | 3.74 | 3.34 | 3.11 | 2.96 | 2.85 | 2.76 | 2.7 | 2.65 | 2.6 | 2.53 | 2.46 | 2.39 | 2.35 | 2.31 | 2.27 | 2.22 | 2.18 | 2.13 | |
| 15 | 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.9 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.59 | 2.54 | 2.48 | 2.4 | 2.33 | 2.29 | 2.25 | 2.2 | 2.16 | 2.11 | 2.07 | |
| 16 | 4.49 | 3.63 | 3.24 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.54 | 2.49 | 2.42 | 2.35 | 2.28 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.1 | 2.06 | 2.01 | |
| 17 | 4.45 | 3.59 | 3.2 | 2.96 | 2.81 | 2.7 | 2.61 | 2.55 | 2.49 | 2.45 | 2.38 | 2.31 | 2.23 | 2.19 | 2.15 | 2.1 | 2.06 | 2.01 | 1.96 | |
| 18 | 4.41 | 3.55 | 3.16 | 2.93 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 | 2.41 | 2.34 | 2.27 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.97 | 1.92 | |
| 19 | 4.38 | 3.52 | 3.13 | 2.9 | 2.74 | 2.63 | 2.54 | 2.48 | 2.42 | 2.38 | 2.31 | 2.23 | 2.16 | 2.11 | 2.07 | 2.03 | 1.98 | 1.93 | 1.88 | |
| 20 | 4.35 | 3.49 | 3.1 | 2.87 | 2.71 | 2.6 | 2.51 | 2.45 | 2.39 | 2.35 | 2.28 | 2.2 | 2.12 | 2.08 | 2.04 | 1.99 | 1.95 | 1.9 | 1.84 | |
| 21 | 4.32 | 3.47 | 3.07 | 2.84 | 2.69 | 2.57 | 2.49 | 2.42 | 2.37 | 2.32 | 2.25 | 2.18 | 2.1 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.87 | 1.81 | |
| 22 | 4.3 | 3.44 | 3.05 | 2.82 | 2.66 | 2.55 | 2.46 | 2.4 | 2.34 | 2.27 | 2.2 | 2.13 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.91 | 1.86 | 1.81 | 1.78 | |
| 23 | 4.28 | 3.42 | 3.03 | 2.8 | 2.64 | 2.53 | 2.44 | 2.37 | 2.32 | 2.27 | 2.2 | 2.13 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.91 | 1.86 | 1.81 | 1.76 | |
| 24 | 4.26 | 3.4 | 3.01 | 2.78 | 2.62 | 2.51 | 2.42 | 2.36 | 2.3 | 2.25 | 2.18 | 2.11 | 2.03 | 1.99 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.73 | |
| 25 | 4.24 | 3.39 | 2.99 | 2.76 | 2.6 | 2.49 | 2.4 | 2.34 | 2.28 | 2.24 | 2.16 | 2.09 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.71 | |
| 30 | 4.17 | 3.32 | 2.92 | 2.69 | 2.53 | 2.42 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.16 | 2.09 | 2.01 | 1.93 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.68 | 1.62 | |
| 40 | 4.06 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.12 | 2.08 | 2 | 1.92 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.69 | 1.64 | 1.58 | 1.51 | |
| 60 | 4 | 3.15 | 2.76 | 2.53 | 2.37 | 2.25 | 2.17 | 2.1 | 2.04 | 1.99 | 1.92 | 1.84 | 1.75 | 1.7 | 1.65 | 1.59 | 1.53 | 1.47 | 1.39 | |
| 120 | 3.92 | 3.07 | 2.68 | 2.45 | 2.29 | 2.18 | 2.09 | 2.02 | 1.96 | 1.91 | 1.83 | 1.75 | 1.66 | 1.61 | 1.55 | 1.49 | 1.43 | 1.35 | 1.25 | |
| 1000000 | 3.84 | 3 | 2.6 | 2.37 | 2.21 | 2.1 | 2.01 | 1.94 | 1.88 | 1.83 | 1.75 | 1.67 | 1.57 | 1.52 | 1.46 | 1.39 | 1.32 | 1.22 | 1.01 | |

Grados de libertad del denominador

TABLE C: Chi-Square distributions

| cum probability | 0.025 | 0.80 | 0.90 | 0.95 | 0.975 | 0.99 | 0.995 | 0.999 | 0.9995 |
|-----------------|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| right tail | 0.975 | 0.2 | 0.1 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 | 0.001 | 0.0005 |
| df | | | | | | | | | |
| 1 | 0.00098 | 1.64 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 | 10.83 | 12.12 |
| 2 | 0.051 | 3.22 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.60 | 13.82 | 15.20 |
| 3 | 0.216 | 4.64 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.34 | 12.84 | 16.27 | 17.73 |
| 4 | 0.48 | 5.99 | 7.78 | 9.49 | 11.14 | 13.28 | 14.86 | 18.47 | 20.00 |
| 5 | 0.83 | 7.29 | 9.24 | 11.07 | 12.83 | 15.09 | 16.75 | 20.51 | 22.11 |
| 6 | 1.24 | 8.56 | 10.64 | 12.59 | 14.45 | 16.81 | 18.55 | 22.46 | 24.10 |
| 7 | 1.69 | 9.80 | 12.02 | 14.07 | 16.01 | 18.48 | 20.28 | 24.32 | 26.02 |
| 8 | 2.18 | 11.03 | 13.36 | 15.51 | 17.53 | 20.09 | 21.96 | 26.12 | 27.87 |
| 9 | 2.70 | 12.24 | 14.68 | 16.92 | 19.02 | 21.67 | 23.59 | 27.88 | 29.67 |
| 10 | 3.25 | 13.44 | 15.99 | 18.31 | 20.48 | 23.21 | 25.19 | 29.59 | 31.42 |
| 11 | 3.82 | 14.63 | 17.28 | 19.68 | 21.92 | 24.73 | 26.76 | 31.26 | 33.14 |
| 12 | 4.40 | 15.81 | 18.55 | 21.03 | 23.34 | 26.22 | 28.30 | 32.91 | 34.82 |
| 13 | 5.01 | 16.98 | 19.81 | 22.36 | 24.74 | 27.69 | 29.82 | 34.53 | 36.48 |
| 14 | 5.63 | 18.15 | 21.06 | 23.68 | 26.12 | 29.14 | 31.32 | 36.12 | 38.11 |
| 15 | 6.26 | 19.31 | 22.31 | 25.00 | 27.49 | 30.58 | 32.80 | 37.70 | 39.72 |
| 16 | 6.91 | 20.47 | 23.54 | 26.30 | 28.85 | 32.00 | 34.27 | 39.25 | 41.31 |
| 17 | 7.56 | 21.61 | 24.77 | 27.59 | 30.19 | 33.41 | 35.72 | 40.79 | 42.88 |
| 18 | 8.23 | 22.76 | 25.99 | 28.87 | 31.53 | 34.81 | 37.16 | 42.31 | 44.43 |
| 19 | 8.91 | 23.90 | 27.20 | 30.14 | 32.85 | 36.19 | 38.58 | 43.82 | 45.97 |
| 20 | 9.59 | 25.04 | 28.41 | 31.41 | 34.17 | 37.57 | 40.00 | 45.31 | 47.50 |
| 21 | 10.28 | 26.17 | 29.62 | 32.67 | 35.48 | 38.93 | 41.40 | 46.80 | 49.01 |
| 22 | 10.98 | 27.30 | 30.81 | 33.92 | 36.78 | 40.29 | 42.80 | 48.27 | 50.51 |
| 23 | 11.69 | 28.43 | 32.01 | 35.17 | 38.08 | 41.64 | 44.18 | 49.73 | 52.00 |
| 24 | 12.40 | 29.55 | 33.20 | 36.42 | 39.36 | 42.98 | 45.56 | 51.18 | 53.48 |
| 25 | 13.12 | 30.68 | 34.38 | 37.65 | 40.65 | 44.31 | 46.93 | 52.62 | 54.95 |
| 30 | 16.79 | 36.25 | 40.26 | 43.77 | 46.98 | 50.89 | 53.67 | 59.70 | 62.16 |
| 40 | 24.43 | 47.27 | 51.81 | 55.76 | 59.34 | 63.69 | 66.77 | 73.40 | 76.10 |
| 50 | 32.36 | 58.16 | 63.17 | 67.50 | 71.42 | 76.15 | 79.49 | 86.66 | 89.66 |
| 60 | 40.48 | 68.97 | 74.40 | 79.08 | 83.30 | 88.38 | 91.95 | 99.61 | 102.7 |
| 80 | 57.15 | 90.41 | 96.58 | 101.9 | 106.6 | 112.3 | 116.3 | 124.8 | 128.3 |
| 100 | 74.22 | 111.7 | 118.5 | 124.3 | 129.6 | 135.8 | 140.2 | 149.4 | 153.2 |